1979 г. Май *Том 128, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

536.758

ДЕМОН МАКСВЕЛЛА И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ИНФОРМАЦИЕЙ И ЭНТРОПИЕЙ

Р. П. Поплавский

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в физике черных дыр обнаружены глубокие аналогии с термодинамикой. Если предположить, что площадь поверхности черной дыры пропорциональна энтропии, а поверхностная гравитация — температуре (в мысленных экспериментах взаимодействия черной дыры с падающим на нее телом эти предположения подтверждаются), то можно сформулировать законы физики черных дыр, эквивалентные соответствующим законам термодинамики [1].

Не останавливаясь на целом ряде интересных вопросов, возникающих в связи с этой аналогией (в частности, на причинах того, что третий закон термодинамики оказывается справедливым не во всех формулировках, используемых в термодинамике, — см. [2], а также на анализе нового механизма возникновения статистических закономерностей из динамики), ограничимся здесь лишь главным для темы данной заметки выводом о том, что как и в термодинамике, величина энтропии связана с отсутствием подробной информации о внутреннем строении системы (черной дыры).

Именно этот факт возродил у многих физиков интерес к соотношениям между информацией и энтропией в классической статистической термодинамике и послужил нам толчком к тому, чтобы вновь вернуться к обсуждению этого вопроса — в развитие статьи [3].

Естественно начать обсуждение с анализа деятельности демона Максвелла — простейшей и, по-видимому, первой в литературе термодинамической модели процесса управления.

После описания самой модели Максвелла кратко обсуждаются основные работы, посвященные «изгнанию демона». Затем эта модель рассматривается более детально: выясняются количественные соотношения между информацией и энтропией, в соответствии с целью заметки. При этом полезный эффект процесса управления характеризуется мерой упорядочения системы — уменьшением ее статистической энтропии. Такая характеристика представляется естественной для термодинамического рассмотрения. Всюду в дальнейшем используется термин «негэнтропия» (отрицательная энтропия): полезный эффект упорядочения в системе называется «негэнтропийным эффектом» *).

*) Отметим, во избежание недоразумений, что тот же эффект в [3] назывался «дефектом энтропии». Однако этот термин оказался неудачным, так как был введен ранее в [15], где ему придавался иной смысл. Именно в этом смысле [15] термин использовался и в дальнейшем [16].

Заметим попутно, что, заимствуя понятие «негэнтропия», введенное Бриллюэном [8], мы нигде не используем «негэнтропийный принцип информации», сформулирован-

В гл. 4 рассмотрен пример современной реализации «демона Максвелла» — упорядочение молекул в двухуровневом мазере.

Наконец, проводится анализ термодинамической модели процесса управления в общем случае, существенно использующий результаты предыдущей статьи [3].

Для всех рассмотренных моделей процесса управления показано, что негэнтропийный эффект значительно меньше роста энтропии, вызванного рассеянием энергии в процессе получения информации и собственно управления.

Таким образом, вновь подтверждается вывод [3] о существенной необратимости информационных процессов.

2. ДЕМОН МАКСВЕЛЛА И ЕГО «ИЗГНАНИЕ»

Предпоследний раздел своей книги «Теория теплоты» (в главе «Молекулярная теория строения тел») Максвелл назвал: «Ограничения второго начала термодинамики». Именно здесь кратко описана модель, вызвавшая поток работ, не иссякающий целое столетие. После формулировки второго начала термодинамики в виде «невозможности произвести неравенство температур или давлений без затраты работы» следует описание модели, которое мы приведем полностью [4].

«Но если мы представим себе существо со столь утонченными способностями, чтобы оно могло проследить за движением каждой молекулы, то такое существо, обладая все еще конечными свойствами, было бы в состоянии сделать то, что невозможно для нас. Мы видели, что молекулы в сосуде, наполненном воздухом одинаковой температуры, движутся с неодинаковыми скоростями, хотя средняя скорость большого числа случайно выбранных молекул имеет совершенно точно постоянную величину. Предположим, что такой сосуд разделен на две части, A и B, перегородкой с небольшим отверстием; пусть существо, которое может видеть отдельные молекулы, закрывает и открывает это отверстие так, чтобы допускать переход быстрее движущихся молекул только из A в B, а медленно движущихся — только из B в A. Таким образом, существо может, не затрачивая работы, повысить температуру B и понизить температуру A, вопреки второму началу термодинамики.

Это есть лишь один из примеров, показывающих, что наши заключения, выведенные из опытов над телами, состоящими из несметного числа молекул, могут оказаться неприменимыми к более тонким наблюдениям и опытам, реализуемым при условии, что имелась бы возможность различать и направлять отдельные молекулы, с которыми мы обычно имеем дело только в больших количествах».

Обратим внимание на две особенности описанной модели. С одной стороны, здесь подчеркивается, что используются флуктуации (скоростей) и объектами упорядочения являются отдельные молекулы: в результате большого числа микроуправлений накапливается макроскопический эффект.

С другой стороны, что представляется более существенным, здесь описан процесс, в котором по измеренным значениям одного параметра (скорости) производится управление другой физической величиной (положением клапана, закрывающего или открывающего отверстие), что приводит к упорядочению в системе — негэнтропийному эффекту. Как уже упоминалось выше, в этом смысле данная модель является простейшим частным примером модели процесса управления.

Вначале в литературе обращалось внимание лишь на первую из отмеченных особенностей: предлагались различные варианты модификаций описанного Максвеллом вечного двигателя второго рода, существенно использующие флуктуационные явления. (Заметим, что именно в это время появился введенный В. Томсоном термин «демон Максвелла», тогда как у Максвелла речь идет о «существе», «being».)

Библиография этих работ приведена в докладе Смолуховского [5], посвященном подробному и наглядному анализу флуктуационных явлений с целью доказательства справедливости кинетической теории. Здесь впервые обращено внимание на то, что броуновское движение самого клапана существенно препятствует работе демона Максвелла и подобных автоматических устройств. В частности, рассматривается односторонне действующий клапан и щеколда для зубчатого колеса («храповик и собачка» — по Фейнману [6]) и на основании правдоподобных рассуждений делается вывод о невозможности создания машины, работающей длительное время за счет использования и упорядочения флуктуаций — именно вследствие броуновского движения самого управляющего элемента. Указывается [5], что строгое доказательство может быть проведено лишь с помощью статистической механики (что сделано, в частности, в [6]).

Упомянутая работа Смолуховского [5] представляет значительный интерес потому, что в ней, по-видимому, впервые, столь четко отмечена ограничивающая роль флуктуаций (теплового движения молекул — шума) как для измерения, так и для собст-

---

ный там же: как полезный эффект, так и затраты, связанные с ростом энтропии, вычисляются для всех моделей непосредственно.

венно управления. Косвенно именно отсюда следует необходимость энергетических затрат на этих обоих этапах, обязательно присущих системе управления *).

В большинстве последующих работ, посвященных обсуждаемой модели, основное внимание было сосредоточено лишь на первом этапе процесса управления — этапе получения информации. Сциллард [7] впервые указал на связь энтропии и информации (и, по существу, использовал количественную меру ее, соответствующую шенноновской). Подробно анализируя упрощенную модель, развивающую описанную Максвеллом, Сциллард показал, что для любого упорядочения молекул следует получить информацию об их координатах (или скоростях), т. е. произвести измерение. Получение информации связано с ростом энтропии в системе, по крайней мере не меньшим, чем ее уменьшение за счет упорядочения молекул.

Все дальнейшие работы (Димерса, Джекобсона, Габора, Бриллюэна и др.), подробно разобранные в книге Бриллюэна [8], посвящены оценкам энергетических затрат на этапе измерения в различных модификациях модели демона Максвелла (в том числе и для «демона давления», а не температурного) и сравнению этих затрат с полезным эффектом.

Если определить энтропийную эффективность η процесса как отношение негэнтропийного эффекта $\Delta N = -\Delta S^{(-)}$ (понижение энтропии системы как мера ее упорядочения) к энтропийным затратам $\Delta S^{(+)}$ (повышение энтропии за счет рассеяния энергии при получении информации и управлении), то из всех упомянутых работ следует, что

$$\eta = \frac{\Delta N}{\Delta S^{(+)}} \leqslant 1, \tag{1}$$

причем затраты на собственно управление, как правило, не учитываются. Этот результат как раз и означает «изгнание демона» [8], так как показывает, что второе начало термодинамики не нарушается **).

3. ЭНТРОПИЙНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДЕМОНА МАКСВЕЛЛА

Можно улучшить оценку (1) эффективности η; для этого необходимо более точно оценить затраты энергии и притом на всех этапах, т. е. не только при измерении, но и при непосредственном управлении клапаном.

Всюду в дальнейшем температуру T будем измерять в энергетических единицах, а энтропию S — в относительных ***) (как это принято, например, в книге [9]). Подсчитаем прежде всего негэнтропийный эффект $\Delta N = -\Delta S^{(-)}$.

Пусть T — исходная температура газа в сосуде, а n — общее количество молекул (по $n/2$ в каждой из половин A и B). Пусть в процессе работы «демона» $\Delta n/2$ «горячих» молекул перешли из A в B, а $\Delta n/2$ «холодных» — из B в A. Тогда в обеих частях сосуда установится соответственно температура T_B и T_A, причем

$$\frac{T_B - T_A}{T} = \frac{\Delta T}{T} \equiv \Theta. \tag{2}$$

Найдем связь между Θ и $\Delta n/n$. Пусть средние энергии $\varepsilon_{\text{гор}}$ «горячей» и $\varepsilon_{\text{хол}}$ «холодной» молекул отличаются от начальной средней энергии $\varepsilon_0 = c_V T$ (c_V — теплоемкость при постоянном объеме, отнесенная к одной молекуле) соответственно на $+\Delta\varepsilon_1$ и $-\Delta\varepsilon_2$.

После того как одна молекула с энергией $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_1$ отправлена из A в B, а вместо нее другая молекула с энергией $\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_2$ — из B в A (первый шаг процесса), в B установится температура, соответствующая средней энергии $\varepsilon_1^B = \varepsilon_0 + (2/n)(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2)$, а в A — соответственно $\varepsilon_1' = \varepsilon_0 - (2/n)(\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2)$.

Рассматривая последовательные шаги процесса, на $(\Delta n/2)$-м шаге получим

$$\Theta = \frac{\Delta T}{T} = 2\,\frac{\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2}{\varepsilon_0}\,\frac{\Delta n}{n}, \qquad \frac{\Delta n}{n} \equiv \varkappa, \qquad \beta \equiv \frac{\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Эффективность процесса тем выше, чем больше β (3); однако из соотношения между средней энергией и ее дисперсией ясно, что $\beta \approx 1$.

*) Позднее, в своей книге (1914), цитируемой Сциллардом [7] с. 841), Смолуховский говорит о необходимости энергетических затрат при управлении еще более определенно, упоминая даже о неизбежной диссипации энергии при работе сенсорных и моторных участков коры головного мозга.

**) Мы уже упоминали ранее [3] о неубедительности содержащихся в книге [10] попыток доказать, что это изгнание — лишь кажущееся.

***) При переходе к обычным единицам измерения температуры (в градусах) T следует поделить, а S — умножить на постоянную Больцмана k.

Очевидно, что по самому смыслу модели $\varkappa \leqslant \alpha$, где α — доля молекул, удовлетворяющих требованиям по энергии. Для максимальной эффективности нужно выбрать $\alpha = \alpha_{\max} = 1/2$. В этом случае в качестве «горячих» молекул следует отбирать все те, чьи скорости превышают среднеквадратическое значение $\sqrt{\overline{v_T^2}}$, соответствующее начальной температуре T (аналогично — для «холодных»). Тогда, учитывая (3), можно записать

$$\varkappa = \frac{\Theta}{2\beta} < \varkappa_{\max} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \beta \approx 1, \qquad \Theta < 1. \tag{4}$$

Строго говоря, α уменьшается с каждым шагом процесса по закону $\alpha(i+1) = \alpha(i)[1-(4/n)]$ (см. вывод формулы (3)) из-за изменения температуры, т. е. сдвига значения средней энергии. Кроме того, существует множество других причин, приводящих к более сильному неравенству

$$\varkappa \ll 1, \qquad \Theta \ll 1. \tag{4'}$$

Поскольку, однако, эти причины носят не принципиальный, а технический характер (как будет видно из описания схемы отбора молекул), постольку в дальнейшем условие (4') не используется.

Для идеального газа с количеством молекул n, как известно [9], энтропия $S = n\,(c_V \ln T + \mathrm{const})$.

Обозначая $S_{\text{нач}} = 2S\,(n/2, T)$, $S_{\text{кон}} = S\,(n/2, T_B) + S\,(n/2, T_A)$, имеем $S_{\text{нач}} - S_{\text{кон}} = -\Delta S^{(-)} = \Delta N = -(n/2)c_V \ln\,[1 + (\Delta T/2T)]\,[1 - (\Delta T/2T)]$.

Учитывая (3), (4), получим окончательное выражение для негэнтропийного эффекта:

$$\Delta N \approx \frac{n}{2}\,c_V\,\frac{\Theta^2}{4} = \frac{n}{2}\,c_V \beta^2 \varkappa^2. \tag{5}$$

Для определения η (1) оценим рост энтропии $\Delta S^{(+)} = \Delta S_1^{(+)} + \Delta S_2^{(+)}$ за счет диссипации энергии при получении информации ($\Delta S_1^{(+)}$) и собственно управлении клапаном ($\Delta S_2^{(+)}$).

Для этого рассмотрим конкретную схему отбора молекул. Для измерения скорости молекулы ограничимся обнаружением ее в заданном элементе объема. Величину скорости будем измерять по допплеровскому сдвигу частоты ν сигнала, используемого для зондирования элемента объема.

Для отбора всех скоростей $v \lessgtr \sqrt{\overline{v_T^2}}$ (т. е. при $\alpha \approx 1/2$) и достаточно точного разделения «горячих» молекул от «холодных» можно применить две системы измерения. В первой из них используется несколько ($m \geqslant 5$) отдельных приемников, каждый из которых обнаруживает молекулы в сравнительно узком интервале скоростей δv (энергий $\delta\varepsilon < \Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2$). Во второй используется широкополосный приемник с резким спадом характеристики пропускания.

В первой схеме для каждого приемника вероятность того, что «горячая» (или «холодная») молекула принадлежит его интервалу скоростей: $q = \alpha/m \leqslant 0{,}1$. Во втором случае $q = \alpha \approx 0{,}5$.

В обоих случаях, однако, априорные вероятности обнаружения нужной молекулы («горячей» или «холодной») равны $\alpha \approx 0{,}5$. Поэтому при каждом измерении необходимо, вообще говоря, получать количество информации I_1, равное $\ln 2$. За счет ненулевой вероятности w ложных срабатываний приемника, вызываемых тепловым шумом, конечно, количество информации при обнаружении $I_1 < \ln 2$, и притом тем меньше, чем ближе w к 0,5 (при $w = 0{,}5$ $I_1 = 0$). Уменьшение w, однако, требует увеличения энергии E с зондирующего сигнала.

Приведем здесь расчет для первого случая (несколько узкополосных приемников). Во-первых, только в этом случае удается правильно учесть задержку от момента обнаружения до открытия клапана. Во-вторых, уровень помех в широкополосном приемнике (второй случай) выше.

Выберем параметры газа и размеры клапана так, чтобы среднее время $\hat{\tau}$ между соударениями молекул с клапаном было равно длительности зондирующего сигнала τ, в свою очередь равной постоянной времени согласованного приемника (и времени открытия клапана). Заметим, что при $\hat{\tau} < \tau$ в момент открытия будут попадать «вредные» молекулы, снижающие эффективность. Если же $\hat{\tau} > \tau$, то эффективность не изменится, но увеличится время работы всего устройства. Действительно, хотя в этом случае ложное срабатывание приводит к попаданию «вредной» молекулы лишь с вероятностью $\tau/\hat{\tau}$, но зато количество тактов работы увеличится в $\hat{\tau}/\tau$ раз.

Для эффективной работы устройства требуется обеспечить достаточно малое значение вероятности w ложного обнаружения в каждом такте τ. Найдем его.

Согласованный приемник, настроенный на частоту ν (соответствующую $\varepsilon_{\text{гор}}$ или $\varepsilon_{\text{хол}}$), с постоянной времени $\tau = 1/\Delta\nu$, где $\Delta\nu$ — полоса пропускания, является системой с одной колебательной степенью свободы. При низких частотах ($h\nu \ll T$) эта система подобна классическому осциллятору, для которого, как известно, вероятность w превышения уровня энергии $E_п$ равна $\exp(-E_п/T)$. Таким образом, на входе приемника энергия сигнала E_c должна превышать пороговое значение $E_п = T \ln(1/w)$. Приведем выражение для количества информации $I_1(w)$:

$$I_1 = \ln 2 - w \ln \frac{1}{w} - (1-w) \ln \frac{1}{1-w}$$

Значение w, а с ней и E_c найдем из условия максимизации эффективности:

$$\frac{I_1 T}{E_c} \to \max.$$

Имеем

$$w = w_{опт} \approx 0{,}04,$$
$$E_c > E_п = T \ln \frac{1}{w}, \qquad E_c = CT, \qquad C > 5. \tag{6}$$

Энергия сигнала, попадая в приемник, рассеивается и увеличивает энтропию термостата. Для полного количества обнаружений $\Delta n = \varkappa n$ рост энтропии

$$\Delta S_1^{(+)} = C\varkappa n, \qquad C > 5. \tag{7}$$

При этом полученное количество информации $I_{\Delta n} < \varkappa n \ln 2$. Таким образом, из (7) видно, что энергетическая цена единицы информации при обнаружении превышает T (в общем случае измерения это превышение существенно больше; см. [3] и гл. 5 статьи).

Для определения η (1) необходимо еще учесть энергетические расходы на собственно управление — открытие клапана. Повторяя все те же рассуждения, что и при обнаружении, легко показать, что на управление клапаном (во избежание ложных срабатываний за счет его собственных флуктуаций) следует затратить ровно столько же энергии, сколько при обнаружении, т. е. суммарный рост энтропии в системе

$$\Delta S^{(+)} = 2\Delta S_1^{(+)} = 2C\varkappa n > 10\varkappa n. \tag{8}$$

В данной частной модели управления второй этап (собственно управление) увеличивает затраты (по сравнению с первым этапом-измерением) лишь вдвое. В общем же случае увеличение может быть существенно бо́льшим, так что пренебрежение вторым этапом при расчете энтропийной эффективности процесса управления недопустимо (см. гл. 5).

Из (5), (8), (4) и (1) имеем окончательно

$$\eta \leqslant \frac{c_V \beta}{40} \Theta \equiv a\Theta, \qquad a \leqslant 0{,}06 \tag{9}$$

— для всех реальных значений c_V, β.

Подчеркнем, что эффективность непосредственного нагрева (и охлаждения) существенно выше—даже при резко необратимой реализации процесса. Если использовать термостаты с температурой T_B и T_A соответственно, получим

$$\Delta S^{(+)} = \frac{1}{2} n c_V \frac{\Delta T}{2} \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) \approx \frac{1}{2} n c_V \frac{\Theta^2}{2}, \tag{10}$$

что, вместе с (5), дает (независимо от Θ)

$$\eta = 0{,}5. \tag{11}$$

В отличие от того, эффективность демона Максвелла зависит от Θ и даже при максимально возможных (практически недостижимых) значениях (4) не превышает величины 0,06 (см. (9)). Таким образом, эффективность демона Максвелла действительно мала ((9), (4), (4′)), но по порядку величины (когда $\Theta \ll 1$) сравнима со значением термодинамического к. п. д. цикла Карно для тепловых машин:

$$\eta_C = \frac{\Theta}{1 + (\Theta/2)} \approx \Theta. \tag{12}$$

Сопоставление η с η_C представляется целесообразным, несмотря на существенно различный физический смысл этих коэффициентов: первый характеризует степень необратимости процесса управления (создания упорядоченности в системе), а второй — эффективность обратимого преобразования тепла в работу. Однако для извлечения работы из системы необходим как первый, так и второй этапы. Сравнение η с η_C показывает, что если первый этап реализуется информационным способом, то его эффективность совпадает (по порядку величины) с η_C — максимальной эффективностью дальнейшего полезного использования негэнтропийного эффекта *).

В заключение анализа парадокса Максвелла заметим, что аналогичные (5), (8) — (11) выражения получаются для «демона давления» [8], где роль $\Delta T/T$ играет $\Delta P/P = \Delta n/n$, а вместо термостатов используются баростаты (для расчета, аналогичного (10)).

Таким образом, на примере демона Максвелла показано, что энтропийная эффективность процесса управления невысока (9). Прежде чем перейти к анализу общей термодинамической модели процесса управления, остановимся на кратком рассмотрении примера использования информационного способа разделения молекул в молекулярном генераторе, представляющем интерес в связи с обсуждаемым вопросом.

4. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР НА АММИАКЕ — «ДЕМОН МАКСВЕЛЛА XX ВЕКА»

Известно [11], что для квантовых генераторов высокой частоты ν ($h\nu \gg T$) используются способы создания инверсной населенности уровней, которые можно назвать силовыми, или энергетическими. Например, может применяться непосредственная подкачка с нижнего уровня на более высокий — третий уровень энергии (вспомогательная частота подкачки $\nu_в > \nu$). При этом используется различие в постоянных времени тепловых релаксационных процессов.

Существует также интересный с точки зрения термодинамики способ непосредственного преобразования тепловой энергии в когерентное излучение. Не входя в детали этого (теплового) способа возбуждения (подробно см. [12]), заметим, что здесь вначале на всех трех уровнях устанавливается равновесное распределение, соответствующее температуре нагревателя. Затем,— при температуре холодильника,— инверсия населенности нижнего и среднего уровней достигается за счет значительно меньшего времени релаксации между верхним и средним уровнем (на частоте холостого перехода), чем на других двух частотах (сигнальной и вспомогательной). В статье [12] показано, что квантовый к. п. д. $\eta_q \leqslant \eta_C$ — к. п. д. цикла Карно.

Для двухуровневых квантовых генераторов, характеризующихся низкой сигнальной частотой ($h\nu \ll T$), количество возбужденных молекул сравнимо с количеством невозбужденных. Поэтому в таких генераторах наиболее эффективный способ создания инверсной населенности состоит в пространственном разделении возбужденных и невозбужденных молекул. Такой способ естественно назвать информационным. Именно таким образом работает один из первых молекулярных генераторов — генератор на аммиаке [11, 21, 22].

Роль демона Максвелла, отделяющего возбужденные молекулы от невозбужденных, играет неоднородное электрическое поле, отклоняющее невозбужденные молекулы в сторону сильного, а возбужденные — в сторону слабого поля [11, 21, 22].

Если в резонатор с высокой добротностью в единицу времени поступает достаточное количество возбужденных молекул, то условия самовозбуждения выполняются, а молекулярный генератор будет работать в непрерывном режиме.

Оценим энтропийную эффективность и квантовый к. п. д. [12] такого генератора. Для этого подсчитаем негэнтропию разделения $\Delta N = -\Delta S^{(-)}$ двух типов невзаимодействующих молекул, отличающихся лишь значением энергии. Очевидно, что энтропия разделения $\Delta S^{(-)}$ только знаком отличается от энтропии смешения **) газов ($-\Delta S^{(-)}$).

---

*) Заметим, что этап дальнейшего полезного использования негэнтропийного эффекта лежит вне рассматриваемого здесь процесса управления (а объект работы — вне рассматриваемой термодинамической системы). Аналогично источник начальной негэнтропии (неравновесности), наличие которого обязательно не только в методе непосредственного нагрева, но и в модели с демоном Максвелла, находится вне рассматриваемой системы. Это может быть, в частности, некоторый генератор сигналов, энергия которых (на степень свободы) должна превышать T (см. вывод (7)), либо источник излучения с температурой $T_и > T$ (так как частота ν должна удовлетворять условию $h\nu > T$; см. [8]). Кроме того, нужен, конечно, источник энергии для собственно управления заслонкой.

**) Парадоксам смешения (Гиббса и др.) посвящена обширная литература. Остановимся лишь на недавних публикациях. В [13] обращается внимание на скачок изменения парциальной плотности газа при переходе от его смешения со сколь угодно близким газом к смешению с тождественным газом. В книге [14] (где приведена обширная библиография) авторы справедливо указывают на то, что такое (и подобное ему) объяснение не является разрешением парадокса, суть которого в разрывности (а здесь разрывность не устраняется, а лишь переносится с одного понятия на другое). В соответствии с общими интерференционными принципами квантовой механики вводится [14] непрерывный параметр близости друх частиц — скалярное произведение Ф функций, Заметим прежде всего, что парциальные плотности $n^{(+)}/n$ и $n^{(-)}/n$ двух сортов молекул полностью определяются разностью $h\nu$ энергий между двумя уровнями и монотонно изменяются с изменением параметра $x \equiv h\nu/T$. Здесь n — полное число молекул, $n^{(+)}$, $n^{(-)}$ — количество возбужденных и невозбужденных молекул соответственно.

Для молекулярного генератора на аммиаке при комнатной температуре

$$x \equiv \frac{h\nu}{T} \ll 1, \qquad n^{(+)} = \frac{n}{2}\,\frac{1-x}{1-(x/2)} \approx \frac{n}{2}, \qquad n^{(-)} = \frac{n}{2}\,\frac{1}{1-(x/2)} \approx \frac{n}{2}. \tag{13}$$

В противоположном предельном случае

$$x \gg 1, \qquad n^{(+)} = \frac{ne^{-x}}{1+e^{-x}} \approx ne^{-x}, \qquad n^{(-)} = \frac{n}{1+e^{-x}} \approx n. \tag{14}$$

Как и парциальные плотности, негэнтропия разделения ΔN также монотонно зависит от параметра x.

В нашем случае ΔN легко подсчитать, если использовать известное выражение [9] энтропии через свободную энергию, а последней — через статистическую сумму Z, выделив в ней лишь интересующий нас член (на одну молекулу):

$$\begin{gathered} Z = 1 + e^{-h\nu/T}, \\ \Delta N = -\Delta S^{(-)} = \ln Z + \frac{T}{Z}\,\frac{\partial Z}{\partial T}. \end{gathered} \tag{15}$$

Отсюда для произвольного $h\nu/T \equiv x$ получим

$$\Delta N = \ln(1+e^{-x}) + \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

В двух предельных случаях имеем

$$\Delta N = \Delta I = \begin{cases} \ln 2 - \dfrac{3}{8}x^2 \approx \ln 2, & x \ll 1, \\ xe^{-x} + e^{-x} \approx xe^{-x}, & x \gg 1, \end{cases} \tag{16}$$

где ΔI — средняя информация, полученная при отделении одной молекулы.

Для расчета энтропийных затрат следует оценить энергию Q, рассеиваемую (в термостате) при разделении. При разделении в неоднородном поле каждая из молекул уменьшает свою потенциальную энергию на некоторую величину U. Эта энергия затем рассеивается, т. е. $Q = U$. Значение U легко связать с надежностью разделения. Очевидно, что для надежного разделения необходимо выполнение условия

$$\frac{U}{T} = \frac{Q}{T} \equiv C > 1, \tag{17}$$

так как всегда имеется вероятность w броуновского перехода невозбужденной молекулы в область, предназначенную для возбужденной (и наоборот). С учетом того, что $w > 0$, негэнтропийный эффект (16) уменьшается на величину

$$\Delta I^* = w \ln\frac{1}{w} + (1-w)\ln\frac{1}{1-w}, \tag{18}$$

равную потере информации из-за теплового движения.

Для второго предельного случая ($x \gg 1$) легко получить оценку для C (17), так как должно выполняться соотношение $w = e^{-U/T} \leqslant e^{-x} = n^{(+)}/n$ (см. (14), (16)). Имеем из (16), (17)

$$\Delta S^{(+)} \geqslant x \gg 1, \qquad \eta \leqslant e^{-x} \ll 1, \tag{19}$$

т. е. энтропийная эффективность в этом случае крайне мала. Основным интересующим нас случаем является первый ($x \ll 1$ в (16)), соответствующий молекулярному генератору на аммиаке (13).

Учитывая, что $U = Q = T \ln(1/w)$ (см. (6)), а истинный негэнтропийный эффект $\Delta N^* = \Delta N - \Delta I^*$ (16), (18), легко найти область значений w, соответствующую максимальной эффективности

$$\begin{gathered} \eta = \eta_{\max} = \left(\frac{\Delta N^*}{\Delta S^{(+)}}\right)_{\max} = \frac{1}{C^*}, \qquad C^* \approx 6, \\ w \approx 0{,}04, \qquad \Delta S^{(+)} = C \approx 5. \end{gathered} \tag{20}$$

соответствующих внутренним состояниям смешиваемых газов. Энтропия смешения оказывается непрерывной функцией степени неортогональности внутренних состояний газов, и имеет место непрерывный переход от полной тождественности ($\Phi = 1$) к полной различимости ($\Phi = 0$).

Однако в молекулярном генераторе на аммиаке негэнтропия разделения используется далеко не полностью: в качестве полезного эффекта необходимо учесть лишь запасенную в возбужденных молекулах энергию на частоте ν. Учитывая (13), (17) и $\Delta S^{(+)}$ в (20), получим для квантового к. п. д.:

$$\eta_q = \frac{x}{2C} < x\eta \qquad x \ll 1, \qquad C \approx 5, \tag{21}$$

т. е. как обычно (см. предыдущую главу), дальнейшее полезное использование негэнтропийного эффекта связано с низкой эффективностью, $\eta_q \ll \eta$ (20).

Заметим, что в другом предельном случае ($x \gg 1$) $\eta_q = \eta$ (19), однако здесь сама энтропийная эффективность разделения крайне мала. Возможно, отмеченное обстоятельство является одной из причин того, что этот предельный случай практически не реализуется.

5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ: ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ — ПРОСТЕЙШЕГО ЗВЕНА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В любой системе управления непременно присутствует преобразователь — простейшее звено, в котором по значению непрерывной скалярной физической величины l на входе устанавливается однозначно соответствующее ему значение другой физической величины r на выходе. Будем называть входную величину измеряемой, а выходную — управляемой. Будем считать, что l и r являются соответственно внутренними параметрами двух систем — исследуемой (ИС) и управляемой (УС), характеризующими состояния этих систем. Пусть обе эти системы помещены в термостат с температурой T и до процесса преобразования не взаимодействуют. Процесс преобразования заключается в том, что ИС и УС приводятся в состояние взаимодействия, при котором происходит обмен энергией между ними, вследствие чего с необходимой точностью устанавливается значение r, однозначно связанное со значением l. Так как функция $r(l)$ однозначная, то очевидно [3], что многообразие состояний ИС должно быть не меньше многообразия состояний УС: $\sigma_l \leqslant \sigma_r$. Здесь относительные погрешности

$$\sigma_l = \frac{\sqrt{\overline{\Delta l^2}}}{\delta l} \qquad \sigma_r = \frac{\sqrt{\overline{\Delta r^2}}}{\delta r} \qquad \sigma_r \leqslant \sigma \ll 1 \tag{22}$$

где $\overline{\Delta r^2}$, $\overline{\Delta l^2}$ — средние квадраты тепловых флуктуаций соответствующих параметров,

$$\begin{aligned} \delta r &\equiv r_{\max} - r_{\min}, \qquad r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max}, \\ \delta l &\equiv l_{\max} - l_{\min}, \qquad l_{\min} \leqslant l \leqslant l_{\max}; \end{aligned} \tag{23}$$

σ — заданное значение относительной погрешности преобразования. Относительная точность $1/\sigma_r$ характеризует эффективное число (многообразие) различных значений управляемого параметра *).

Термодинамическая модель процесса преобразования описывает элементарный акт процесса управления (в простейшем случае — единственный, если в системе управления присутствует лишь один преобразователь). С другой стороны, на этой модели можно установить все основные особенности процесса управления (с термодинамической точки зрения) и определить его главные характеристики: ΔN, $\Delta S^{(+)}$, η. Поэтому будем описанную модель для краткости называть термодинамической моделью процесса управления **).

Если функция $r(l)$ линейная, то описанная модель процесса управления в точности соответствует модели процесса измерения, подробно исследованной в [3,17]. Отличие лишь в том, что здесь элемент управления соответствует регистрирующему элементу измерительного прибора, а управляемый параметр r — регистрирующему φ.

Следуя [3], будем считать априорные распределения l и r на отрезках δl и δr (23) равномерными. Для исследования предельных значений энтропийной эффективности η такое предположение естественно, так как обеспечивает максимальный негэнтропийный эффект управления (по сравнению с другими возможными распределениями на отрезке).

---

*) Заметим, что управляемый параметр r одновременно является управляющим для некоторого объекта (или процесса), лежащего вне рассматриваемой модели (см. сноску на с. 170).

**) Вообще говоря, существуют многоканальные схемы не непрерывного, а дискретного (релейного) управления, в которых точность управления определяется количеством каналов, а описанный преобразователь отсутствует. Термодинамическая модель такой схемы оказывается менее естественной и более сложной для анализа. Не останавливаясь на модели дискретного управления, заметим, что энтропийная эффективность таких схем не лучше предельного значения η, достижимого в непрерывных схемах.

Из [3,17] следует, что для обеспечения заданной (22) точности управления энергия взаимодействия U (переданная от ИС к УС или обратно) должна расти пропорционально $1/\sigma^2$. Диссипируемая в процессе управления энергия $Q = U$, если управление производится оперативно (при ограничении времени), или

$$Q \geqslant Q_{\min} = 2\sqrt{UT} = \frac{2T}{\sigma}, \qquad \frac{1}{\sigma^2} \geqslant \Delta S^{(+)} \geqslant \Delta S^{(+)}_{\min} = \frac{2}{\sigma}. \tag{24}$$

$Q_{\min}$, $\Delta S^{(+)}_{\min}$ — соответствуют оптимальному (в $1/\sigma$ раз) замедлению переходного процесса.

Если функция $r(l)$ управляемого параметра r от измеряемого l не линейная, но монотонная, то такое функциональное преобразование в среднем энергетически эквивалентно линейному. Если же $r(l)$ осциллирует во всем диапазоне значений, то минимальные энергетические затраты увеличиваются пропорционально количеству m участков монотонного изменения функции [3], так как $\sigma_l = \sigma_r/m$.

В работе [3] оценен негэнтропийный эффект, характеризующий в описанной модели результат взаимодействия двух систем (в данном случае ИС и УС):

$$-\Delta S^{(-)} = \Delta N = \ln\frac{1}{\sigma} \approx \Delta I. \tag{25}$$

Таким образом энтропийная эффективность процесса управления

$$\eta \leqslant \eta_{\max} = \frac{\Delta N}{\Delta S^{(+)}_{\min}} = \frac{\sigma}{2}\ln\frac{1}{\sigma} \ll 1, \qquad \sigma \ll 1. \tag{26}$$

Заметим, что если процесс управления непременно связан с негэнтропийным эффектом, то в процессе измерения негэнтропийный эффект появляется лишь тогда, когда результат измерения представлен в виде скалярной физической величины φ (например, угла поворота стрелки с пружиной). Тогда эта величина может быть использована для управления — либо непосредственно (если на одну ось со стрелкой помещен элемент управления: $\varphi = r$), либо после преобразования $r(\varphi)$ (если на упомянутой оси находится потенциометрический датчик). В обоих случаях эффективность имеет тот же порядок (но при преобразовании появится коэффициент 1/2 в (26)). Именно на такой модели измерения (которое естественно назвать «активным») основывался анализ процесса измерения в [3]. При этом было отмечено [3], что часто измерением называется лишь первый этап описанного в [3] процесса (например, обнаружение), когда результат измерения — для его использования в целях управления — должен быть преобразован некоторым датчиком в скалярную физическую величину.

Если это преобразование (когда $\Delta S^{(+)} \sim 1/\sigma$; см. (24)) отнести к этапу собственно управления, то энергетическая цена измерения на этапе обнаружения («пассивного» измерения) существенно ниже. Можно в общем случае показать [19], что при $\sigma \ll 1$ (p — вероятность ложного обнаружения в одном элементе)

$$\begin{gathered} \sigma = w, \qquad p = w\sigma = \sigma^2, \qquad E_{\text{п}} = 2T\ln\frac{1}{\sigma}, \\ \Delta S^{(+)} = C_I \ln\frac{1}{\sigma} = C_I I, \qquad C_I > 2. \end{gathered} \tag{27}$$

При этом, однако, негэнтропийный эффект (25) отсутствует, так что говорить об энтропийной эффективности «пассивного» измерения не имеет смысла.

В заключение остановимся кратко на обобщениях рассмотренной здесь модели процесса управления в двух направлениях: когда управляемый параметр зависит от нескольких физических величин ($r(l_1, l_2, \ldots)$), и когда объект управления удален от ИС в пространстве (или во времени). В обоих этих случаях УС взаимодействует не непосредственно с ИС, а с некоторым ее отображением (моделью). Тогда необходимо расширить модель управления, включив в нее этапы (процессы) обработки информации, ее передачи и хранения. Эти процессы, конечно, требуют отдельного детального рассмотрения (см. [3, 18, 19]). Здесь мы кратко остановимся лишь на физическом (энергетическом) смысле способов представления информации, используемых при ее передаче, хранении и обработке.

Прежде всего заметим, что эти процессы не связаны непосредственно с негэнтропийным эффектом, а лишь с переносом информации из одного места в другое, дублированием и преобразованием ее. Поэтому на этих этапах можно добиться значительной экономии энергии, если отказаться от скалярного и перейти к позиционному представлению чисел (лишь на последнем этапе собственно управления необходимо вновь вернуться к скалярному представлению управляемого параметра r). При однозначном преобразовании скалярной величины в векторную каждая составляющая последней требует существенно меньшей точности представления — в пределе может оказаться достаточным различать лишь два ее состояния: наличие или отсутствие сигнала.

И хотя с увеличением количества составляющих (размерности векторного пространства) повышаются требования к надежности $1/w$ (т. е. вероятности w перехода сигнала в какой-либо из составляющих в другой интервал дискретизации), энергетическая цена точности представления всего числа при этом уменьшается.

Подчеркнем, что все известные способы уменьшения энергетической цены точности представления чисел непременно связаны с увеличением времени.

Увеличение времени, однако, уменьшает энергетические затраты лишь до определенных пределов. Хотя эти пределы различны для разных информационных процессов, но всегда конечны: энергетическая цена информации не может быть сколь угодно малой даже при сколь угодно больших ресурсах времени (полосы частот).

При измерении переход от зависимости $\Delta S^{(+)} \sim 1/\sigma^2$ к $\Delta S^{(+)} \sim 1/\sigma$ связан с оптимальным (в $1//\sigma$ раз) замедлением переходного процесса [3].

За счет отказа от скалярного представления и перехода к векторному можно получить зависимости: $\Delta S \sim \ln^2 (1/\sigma)$ — при разрядном способе кодирования, когда время Δt (или полоса частот) увеличиваются в $\sim \ln (1/\sigma)$ раз; $\Delta S^{(+)} \sim \ln (1/\sigma)$ — при однопозиционном *) кодировании, когда $\Delta t \sim 1/\sigma$ (см. [19]).

Асимптотически наилучшим (в смысле произведения $\Delta S^{(+)} \Delta t$) является избыточное кодирование по Шеннону, использующее разрядное представление с дополнительными (проверочными) разрядами: здесь дополнительное увеличение размерности векторного пространства позволяет обнаружить и исправить ошибки некоторой кратности, что понижает требования к вероятности p искажения (и к отношению сигнал/шум) в одном разряде. При этом достигается $\Delta S^{(+)} \sim \ln (1/\sigma)$ с одновременным ростом времени лишь в $\ln (1/\sigma)$ раз. Но и при самых лучших способах кодирования энергетическая цена единицы информации [18] превышает T, т. е. $\Delta S^{(+)} > I$, а энтропийная эффективность $\eta \ll 1$ (26) (так как негэнтропийный эффект дают лишь те информационные процессы, которые связаны с управлением или «активным» измерением, т. е. со скалярным представлением чисел).

6. ИНФОРМАЦИЯ И ЭНТРОПИЯ

Следует различать две стороны вопроса о соотношении между информацией и энтропией.

Одна сторона связана с идущим от Больцмана и Гиббса статистическим толкованием энтропии как характеристики неполноты (неопределенности) информации о внутренней структуре системы при задании ее макроскопических параметров (см., например, [2]). Здесь уместно вновь вернуться к аналогии с черными дырами [1], упомянутой во введении. В работах Бекенштейна [20] сформулирован и исследован на примерах обобщенный второй закон термодинамики в физике черных дыр: сумма энтропии черных дыр и энтропии вещества вне их никогда не убывает. Существенно, что рост энтропии черной дыры при захвате внешнего тела прямо характеризуется потерей информации об этом теле. Именно таким образом на примере захвата элементарной частицы, не имеющей внутренней структуры (потеря информации — один бит), определяется [20] безразмерный множитель, связывающий энтропию черной дыры с площадью ее поверхности. Поэтому естественно, что, как и в термодинамике, уменьшение информации $(-\Delta I)$ о внутренней структуре, по определению, соответствует увеличению энтропии $(+\Delta S)$ этой системы. Принципиальное различие состоит в том, что в термодинамике имеется возможность вновь сжать или охладить газ, т. е. понизить его энтропию $(-\Delta S^{(-)} = \Delta N)$, тогда как энтропия тела в черной дыре максимальна для данной массы и не может быть уменьшена: информация о внутренней структуре черной дыры строго не доступна внешнему наблюдателю. Заметим, что упомянутый негэнтропийный эффект в газе

$$-\Delta S^{(-)} = \Delta N = \Delta I \tag{28}$$

достигается «неинформационным» способом: при сжатии (или охлаждении) уменьшается неопределенность координат (или скоростей) сразу всех молекул.

Таким образом, сравнивая две аналогичные термодинамические системы с различной энтропией $(S_1 - S_2 = \Delta S^{(-)})$, мы вправе утверждать, в соответствии с (28), что эта разность в точности определяется различным количеством информации об их внутренней структуре. Более того, при коллективном воздействии на молекулы газа можно сколь угодно близко подойти к обратимому процессу, т. е. получить $\eta = 1$. Это означает, что в этих (и только в этих) случаях негэнтропийный принцип информации Бриллюэна [8] — в наших обозначениях в форме

$$\Delta S^{(+)} \geqslant \Delta I \geqslant \Delta N, \tag{29}$$

— справедлив в виде равенств.

*) В этом случае (как и при обнаружении) число представляется импульсом в одной позиции из $1/\sigma$ возможных.

Совсем другая сторона вопроса — получение информации о макросостояниях термодинамической системы и вообще процессы упорядочения (управления), реализуемые информационными способами. На рассмотренных выше моделях показано, что все информационные процессы принципиально необратимы. Предполагая, что все эти модели достаточно полно отражают особенности возможных способов упорядочения (управления), отметим их общие и отличительные черты.

Из (29) видны две основные причины, приводящие к $\eta < 1$. Во-первых, при любых способах получения информации в левой части (29) имеет место строгое неравенство $\Delta S^{(+)} > \Delta I$, т. е. энергетическая цена единицы информации строго больше T.

Во-вторых, если аккуратно учесть переход $\Delta I \to \Delta N$, то и при упорядочении негэнтропийный эффект меньше информационного, т. е. в правой части (29) также имеет место строгое неравенство.

Отличительная особенность модели управления с демоном Максвелла состоит в том, что на этапе измерения оказывается достаточным ограничиться обнаружением — без последующего преобразования результата измерения в скалярную величину. Такая особенность возникает тогда, когда измеряемой величиной является время, и притом не интервал, а момент времени; лишь в этом частном случае результат обнаружения может быть непосредственно использован для управления. Поэтому энергетические затраты на каждом шаге микроуправления определяются зависимостью (6), а не (24).

На последующих этапах, однако, сказывается неэффективность управления отдельными молекулами: даже температурный эффект меньше информационного (на одном шаге $\delta T/T = 4/n$, а $I \approx \ln 2$), негэнтропийный эффект еще существенно меньше (см. (4), (5)). Второй порядок малости $\Delta N \sim \Theta^2$ объясняется тем, что эффект имеет разностный характер *) (лишь в одной половине сосуда T и S уменьшаются, а в другой — возрастают). При этом, однако, затраты суммируются (см. (7), (8)). Все это вместе и приводит к $\eta \ll 1$ (9).

Использование термостатического способа охлаждения (и нагрева), как уже упоминалось, вследствие коллективного (неинформационного) характера воздействия на все молекулы, значительно эффективнее: даже при необратимой реализации такого рода процессы дают $\eta \approx 0{,}5$ (см., в частности, (11)).

Здесь уместно перейти к следующей модели и отметить отличие коллективного, но различного для двух сортов молекул (т. е. уже информационного), воздействия при их разделении.

В этих случаях управление (разделение) происходит одновременно с измерением (типа обнаружения), и негэнтропийный эффект равен информационному. При этом и затраты (см. (6), (27)), и потери в негэнтропийном эффекте (см. (18) и (16)) полностью определяются надежностью $1/w$ разделения. Требования к последней зависят от априорных вероятностей π_1, $\pi_2 = 1 - \pi_1$ обнаружения (наличия) двух сортов молекул. Наилучшие условия разделения соответствуют молекулярному генератору на аммиаке:

$$x \ll 1, \ \pi_1 \approx \pi_2 = 1/2$$

(см. (13)). Максимизация η дает сравнительно высокие ее значения ($\sim 0{,}1$—$0{,}2$); см. (20). Вообще же требуется

$$w < \min\{\pi_1, \pi_2\},$$

что в случае $x \gg 1$ (см. (14)) приводит к крайне низкой эффективности (19).

Наконец, в общем случае управления по макроскопическому параметру $\Delta N = (0{,}5 \div 1)\,\Delta I$, в зависимости от затрат на преобразование при переходе от измерения к управлению (см. (25), (26) и следующий за ними абзац). Малая эффективность (26) при высокой точности $1/\sigma$ управления объясняется крайне невыгодным (растущим экспоненциально с увеличением ΔI) расходованием энергии (см. (24), (25)) на «активное» измерение и управление или представление информации в одной физической величине (в одной степени свободы системы). Именно поэтому всегда, когда нет необходимости в скалярном представлении информации (числа), в соответствии с предыдущей главой, используются различные позиционные (векторные) способы представления чисел, характеризуемые распределением энергии по многим степеням свободы.

Таким образом, энтропия дополнительна (28) лишь информации о микросостояниях (о внутренней структуре) системы.

Однако все способы получения информации о макросостояниях системы и ее упорядочения строго необратимы ($\eta < 1$).

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу и участникам руководимого им семинара, в особенности Д. А. Киржницу, за внимание и интерес к рассмотренным вопросам, стимулировавшие написание этой заметки, И. А. Зайденману, Л. А. Ривлину и Л. И. Розоноэру за полезные обсуждения.

*) Заметим, что в цикле Карно полезный эффект также имеет разностный характер, что дает $\eta_C \approx \Theta$ (12).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов В. П.— УФН, 1976, т. 118, с. 473.
2. Терлецкий Я. П. Статистическая физика.— М.: Высшая школа, 1973.
3. Поплавский Р. П.— УФН, 1975, т. 115, с. 465.
4. Maxwell J. C. Theory of Heat.— London: 1871.— P. 308 — Перевод: Максвелл Дж. К.— Теория теплоты.— Киев: 1888 — с. 288).
5. Smoluchowski M., von — Zs. Phys., 1912, Bd. 13, S. 1069.— Перевод в кн.: Эйнштейн А., Смолуховский С. Броуновское движение.— М.; Л.: ОНТИ, 1936 — с. 166.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 4.— М.: Мир, 1965.
7. Szillard L.— Zs. Phys., 1929, Bd. 53, S. 840.
8. Бриллюэн Л. Наука и теория информации.— М.: Физматгиз, 1960.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1976.
10. Шамбадаль П. Развитие и приложение понятия энтропии.— М.: Наука, 1967.
11. Зингер Дж. Мазеры.— М.: ИЛ, 1961.
Троуп Г. Квантовые усилители и генераторы,— М.: ИЛ, 1961.
12. Конюхов В. К., Прохоров А. М.— УФН, 1976, т. 119, с. 541.
13. Базаров И. П.— УФН, 1976, т. 118, с. 439.
14. Гельфер Я. М., Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И. Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике.— М.: Наука, 1975.
15. Лебедев Д. С., Левитин Л. Б.— В кн. Теория передачи информации,— М.: Наука, 1964, с. 5.
16. Митюгов В. В. Физические основы теории информации.— М.: Сов. радио, 1976.
17. Поплавский Р. П.— ДАН СССР, 1972, т. 202, с. 562.
18. Поплавский Р. П.— Изв. АН СССР. Сер. «Техн. кибернетика», 1979, № 3.
19. Поплавский Р. П.— Ibid., 1979, № 4.
20. Bekenstein J. D.— Phys. Rev. Ser. D., 1973, v. 7, p. 2333; 1974, v. 9, p. 3292.
21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 8.— М.: Мир, 1966.
22. Ораевский А. Н. Молекулярные генераторы.— М.: Наука, 1964.